# Mengentheorie

## 1. Der Mengenbegriff

- Georg Cantor (1845 – 1918): *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*
- Der Ausgangspunkt der Mengentheorie besteht dabei in der Idee, Gesamtheiten (Mengen) von Objekten als ebensolche Gegenstände aufzufassen wie die zusammengefassten Objekte selbst. Grundlegend für das Mengenverständnis ist dabei das sog. *Extensionalitätsprinzip*: *Zwei Mengen, welche die gleichen Elemente enthalten, sind gleich.* Die Mengenbildung kann durch das Umschlingen von Objekten durch ein Lasso veranschaulicht werden. Demgemäß gibt es Mengen mit nur einem Element (sog. *Einermengen*) und eine *leere Menge* (symbolisiert durch „$\varnothing$“). Die Begriffe *Menge* und *Klasse* werden *manchmal* synonym verwendet (engl.: *set*, *class*).

## 2. Notation

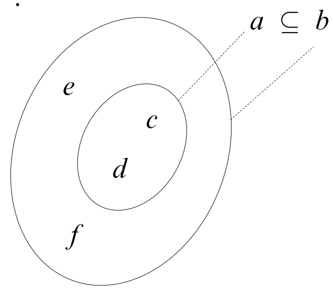
- Bezeichnungen für Mengen können gebildet werden durch das Einschließen der (Namen der) Elemente in sog. Mengenklammern: „$\{\ldots\}$“. Dies bezeichnet man als *aufzählende Darstellung* einer Menge (wie im Falle von „$\{2, 4, 6, 8\}$“). Solche Mengenbeschreibungen stoßen an ihre Grenzen, wenn es um Mengen mit unendlich vielen Elementen geht. Solche Mengen können aufzählend angedeutet (wie bei „$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$“) oder durch Beschreibung mittels einer Eigenschaft $P$ charakterisiert werden. So bezeichnet „$\{x \mid P(x)\}$“ die Menge aller Objekte $x$, für welche gilt: $x$ hat die Eigenschaft $P$. So ist etwa $\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{x \mid x \textit{ ist eine gerade Zahl}\}$. Diese Art, Mengen zu beschreiben, wird auch als *Mengenklammernotation* bezeichnet.



## 3. Elemente und Teilmengen

- Die Enthaltensein- oder *Elementrelation* wird durch „$\in$“ symbolisiert: Demnach besagt „$a \in b$“ soviel wie „$a$ ist ein Element von $b$“. Ist $a$ *kein* Element von $b$, wird dies notiert als „$a \notin b$“.
- Zu unterscheiden von der Elementrelation ist die *Teilmengenrelation*: Eine Menge $a$ ist Teilmenge von $b$ (in Zeichen: $a \subseteq b$), falls alle Elemente von $a$ auch Elemente von $b$ sind. „$a \nsubseteq b$“ besagt entsprechend „$a$ ist *keine* Teilmenge von $b$“.

  Beispielsweise ist
  $a \subseteq b$, mit
  $a = \{c, d\}$ und
  $b = \{c, d, e, f\}$:




- Insbesondere ist jede Menge $a$ Teilmenge ihrer selbst (d. h. $a \subseteq a$) und $\varnothing$ ist Teilmenge *jeder* Menge.
- $a$ ist *echte Teilmenge* von $b$ (in Zeichen: $a \subset b$), falls $a \subseteq b$ aber $a \neq b$.
- *Notationsvarianten:* Anstelle von „$a \subseteq b$“ wird gelegentlich auch notiert: „$a \subseteqq b$“, für „$a \subset b$“ auch „$a \subsetneqq b$“ oder „$a \subsetneq b$“.

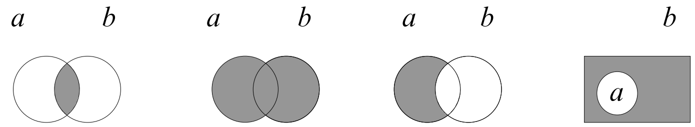
## 4. Mengenoperationen

- Ist $a$ eine Menge, wird die Gesamtheit aller Teilmengen von $a$ als *Potenzmenge* von $a$ (kurz: $\wp a$) bezeichnet. Nach dem sog. Satz von Cantor besitzt jede Menge mehr Teilmengen als Elemente (d. h. $\wp a$ besitzt mehr Elemente als $a$). Daher kann es keine Menge geben, welche *alle* Mengen enthält.

  Sind $a$ und $b$ Mengen, dann wird unter …

- „$a \cap b$“ die *Schnittmenge* von $a$ und $b$ verstanden, welche genau die Gegenstände enthält, welche in $a$ *und* in $b$ sind

- „$a \cup b$“ die *Vereinigungsmenge* von $a$ und $b$ verstanden, welche genau die Gegenstände enthält, welche in *a und/oder* in $b$ sind
- „$a - b$“ die *Differenz* von $a$ und $b$ verstanden, welche genau die Gegenstände enthält, welche in *a aber nicht* in $b$ sind
- „$\overline{a}$“ das *Komplement* von $a$ (hinsichtlich einer Grundmenge $b$) verstanden, welches genau die Gegenstände enthält, welche *nicht* in $a$ (aber in $b$ sind).




*grau:* $a \cap b$ $a \cup b$ $a - b$ $\overline{a}$

## 5. Geordnete Paare und *n*-Tupel

- Eine Menge mit genau zwei Elementen $\{a, b\}$ heißt *Paarmenge*. Nach dem Extensionalitätsprinzip ist $\{a, b\} = \{b, a\}$. U. U. ist jedoch die *Reihenfolge* der Elemente eines Paares von Interesse. In einem solchen Fall spricht man von einem *geordneten Paar* und notiert: $\langle a, b\rangle$. Ist $a \neq b$, ist im Falle eines geordneten Paares auch $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$. Ein geordnetes Paar ist also eine Zusammenfassung von zwei Elementen *zuzüglich* einer Reihenfolge bzgl. dieser Elemente.
- In der Regel wird das geordnete Paar $\langle a, b\rangle$ definiert als $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.
- Mittels geordneter Paare können (geordnete) *Tripel* (geordnete Mengen mit drei Elementen), *Quadrupel* (geordnete Mengen mit vier Elementen) und allgemein *n-Tupel* (geordnete Mengen mit $n$-vielen Elementen) definiert werden:

  $\langle a, b, c\rangle = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$

  $\langle a, b, c, d\rangle = \langle\langle a, b, c\rangle, d\rangle$

  $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$
- *Notationsvariante:* Anstelle der eckigen Klammern wie in „$\langle a, b\rangle$“ werden gelegentlich auch einfache verwandt: „$(a, b)$“



## 6. Relationen und kartesische Produkte

- Eine (zweistellige) *Relation* ist eine Menge von geordneten Paaren, eine *n-stellige Relation* ist entsprechend eine Menge von $n$-Tupeln. So kann etwa die Relation *x liebt y* beschrieben werden als die Menge der geordneten Paare $\langle x, y\rangle$, von welchen $x$ $y$ liebt. (Hier ist die Reihenfolge der Elemente der Paare wesentlich, da es (ggf. tragischerweise) nicht dasselbe ist, ob Hans Anna liebt, oder ob auch Anna Hans liebt!)
- Sind $A$ und $B$ Mengen, so wird die Menge der geordneten Paare $\langle a, b\rangle$ mit $a \in A$ und $b \in B$ als *kartesisches Produkt* (in Zeichen: $A \times B$) bezeichnet. $A \times A$, die Menge aller geordneten Paare, deren Elemente in $A$ sind, wird auch als $A^2$ bezeichnet. Entsprechend ist $A^n$ die Menge aller $n$-Tupel, deren Elemente in $A$ sind.
- Ist $R$ eine zweistellige Relation, bezeichnet man als *Inverse* von $R$ die Relation $R^{-1}$, die wie folgt definiert ist: $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$.
- Zu den wichtigen Eigenschaften, die eine Relation $R$ besitzen kann, zählen die folgenden:

  *Reflexivität:* $\forall x\, R(x, x)$

  *Irreflexivität:* $\forall x\, \neg R(x, x)$

  *Symmetrie:* $\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

  *Asymmetrie:* $\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

  *Antisymmetrie:* $\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y]$

  *Transitivität:* $\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)]$
- Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, nennt man auch *Äquivalenzrelationen*. Solche Relationen bestehen zwischen Objekten, die in einer bestimmten Hinsicht identisch sind. Zu den Äquivalenzrelationen zählen etwa *gleich alt wie*, *gleich geformt wie* usw.
- Ist $R$ eine solche Äquivalenzrelation über einer Menge $D$, kann man alle Objekte, die zu einem Objekt $x$ aus $D$ äquivalent im Sinne von $R$ sind, zu einer Gruppe $[x]_R$ zusammenfassen. Eine solche Gruppe nennt man auch *Äquivalenzklasse* (von $x$):

$$[x]_R = \{y \in D \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

## 7. Funktionen

- *Funktionen* sind Zuordnungen, welche bestimmten Objekten aus einem Gegenstandsbereich jeweils *genau ein* Objekt zuweisen. Die Gesamtheit aller Objekte, denen ein Gegenstand zugewiesen wird, heißt *Definitionsbereich* der Funktion. Die Gesamtheit der zugewiesenen Objekte bilden den so genannten *Wertebereich*.
- Eine Funktion $f$ kann charakterisiert werden als bestimmte Art von Relation (also als Menge von geordneten Paaren), nämlich derart, dass für alle $x$, $y$ und $z$ gilt: Falls $\langle x, y\rangle \in f$ und $\langle x, z\rangle \in f$, dann ist $y = z$. (Diese Bedingung schließt aus, dass einem Objekt des Definitionsbereichs zwei verschiedene Objekte zugeordnet werden.) Anstatt „$\langle x, y\rangle \in f$" notiert man „$f(x) = y$".
- Wird jedem Objekt des Gegenstandsbereiches von einer Funktion ein Gegenstand zugeordnet (ist also der Definitionsbereich der Funktion identisch mit dem Gegenstandsbereich) heißt die Funktion *total*. Anderenfalls (falls der Definitionsbereich der Funktion also nur eine echte Teilmenge des Gegenstandsbereiches ist), spricht man von einer *partiellen Funktion*. Gehört ein Objekt $x$ (nicht) zum Definitionsbereich einer Funktion $f$, sagt man, $f$ sei (*nicht*) *definiert auf* $x$.
- Eine Funktion $f'$ nennt man *Erweiterung* einer Funktion $f$, wenn der Definitionsbereich von $f$ eine Teilmenge des Definitionsbereiches von $f'$ ist und $f(a) = f'(a)$ gilt für jedes $a$ im Definitionsbereich von $f$. $f$ und $f'$ stimmen somit in allen Zuordnungen überein, die von $f$ vorgenommen werden, allerdings kann $f'$ darüber hinaus weitere Zuordnungen vornehmen.



## 8. Exkurs: Philosophische Konsequenzen von Cantors Theorem

- Cantors Theorem wurde verschiedentlich für philosophische Argumentationszwecke verwendet. Literaturhinweise finden sich unten. Im Folgenden wird ein Argument von Patrick Grim vorgestellt, der zeigen will, dass es nicht eine Menge aller Tatsachen geben kann.
- Grim argumentiert indirekt (vgl. zum Folgenden Grim 1991, S. 91–94): Angenommen, es gibt die Menge aller Tatsachen $T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$. Dann gibt es auch deren Potenzmenge $\wp T$, zu welcher die folgenden Elemente gehören:

$$\varnothing, \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \ldots, \{t_1, t_2\}, \{t_1, t_3\}, \ldots, \{t_1, t_2, t_3\}, \ldots$$

Jeder solchen Menge korrespondiert eine Tatsache, etwa dass $t_1$ (nicht) Element der Menge ist:

$$t_1 \notin \varnothing,\ t_1 \in \{t_1\},\ t_1 \notin \{t_2\},\ t_1 \notin \{t_3\}, \ldots,$$
$$t_1 \in \{t_1, t_2\},\ t_1 \in \{t_1, t_3\}, \ldots,\ t_1 \in \{t_1, t_2, t_3\}, \ldots$$

Also gibt es mindestens so viele Tatsachen wie Elemente von $\wp T$. Nach Cantors Potenzmengensatz besitzt $\wp T$ aber *mehr* Elemente als $T$. Somit kann $T$ nicht die Menge aller Tatsachen sein, was im Widerspruch zur Annahme steht!

### Literatur


- Patrick Grim, *The Incomplete Universe. Totality, Knowledge, and Truth*, Cambridge (MA) & London: MIT-Press.

Eine alternative philosophische Interpretation von Cantors Theorem:

- Graham Priest, *Beyond the Limits of Thought*, 2. Aufl., Oxford: Oxford University Press 2002.

Weitere (zumeist philosophische) Literatur zu Cantors Mengentheorie:

- Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton: Princeton University Press 1990.
- Michael Hallett, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Oxford University Press 1984.
- A. W. Moore, *The Infinite*, 2. Aufl., London & New York: Routledge 2001.